数理解析研究所講究録
1096 巻 1999 年 15-24

ATR_0 のモデル論的 Ordinal Analysis

東北大学理学研究科 高橋 康博 (Yasuhiro Takahashi)

概 要

ここでは, [1] に基づき 2 階算術の部分体系 ATR_0 についてのモデル論的 ordinal analysis を紹介する. この方法では, cut-elimination を使うことなしに, ATR_0 の proof-theoretic ordinal が求められる. また, Kruskal の定理が ATR_0 で証明できないことを H. Friedman の方針に従って述べる.

1 ATR_0 の proof-theoretic ordinal

[1] にある ATR_0 に対する結果を述べるために, いくつか定義をする.

定義 1.1 ordinal (notation のゲーデル数) α に対して, 基本列 $\alpha[n]$ (自然数全体から ordinal notation のゲーデル数の集合への関数) を以下のように定義する.
以下, λ は limit ordinal をあらわすものとする.

1. $0[n] = 0$.
2. $(\alpha+1)[n] = \alpha$.
3. $(\alpha+\lambda)[n] = \alpha + (\lambda[n])$.
4. $\omega^{\alpha+1}[n] = \omega^{\alpha} \cdot (n+2)$.
5. $\varphi(\alpha,\lambda)[n] = \varphi(\alpha, \lambda[n]+1)$.
6. $\varphi(\alpha+1,0)[n] = \varphi_{\alpha}^{n+2}(1)$.
7. $\varphi(\alpha+1,\beta+1)[n] = \varphi_{\alpha}^{n+2}(\varphi(\alpha+1,\beta)+1)$.
8. $\varphi(\lambda,0)[n] = \varphi(\lambda[n],\lambda[n])$.
9. $\varphi(\lambda,\beta+1)[n] = \varphi(\lambda[n]+1, \varphi(\lambda,\beta)+1)$.
10. $\Gamma_0[n] = \gamma_{n+1}$.
11. $\Gamma_{\alpha+1}[n] = \gamma_{n+1}^{\Gamma_\alpha+1}$.
12. $\Gamma_{\lambda}[n] = \Gamma_{\lambda[n]+1}$.

上の $\varphi(\alpha,\beta)$ (これを $\varphi_\alpha(\beta)$ とかく) は, 次のような ordinal をあらわしている.

- $\varphi_0(\beta)=\omega^\beta$.
- $\varphi_\alpha(\beta)=$ 任意の $\alpha' \prec \alpha$ に対して, $\varphi_{\alpha'}(\gamma)=\gamma$ となる β 番目の γ.

また, $\gamma_0=\varepsilon_0$, $\gamma_{n+1}=\varphi(\gamma_n,0)$ であり, Γ_β は $\varphi_\alpha(0)=\alpha$ となる β 番目の α のことである.

以下, M を true arithmetic の超準モデルとする. また, 集合を $\{a_0,\ldots,a_k\}$ とかいた場合には, $a_0<\cdots<a_k$ であるとする.

定義 1.2 M の部分集合 $A=\{a_0,\ldots,a_k\}$ と ordinal notation α に対し,

$$\alpha[A]=(\cdots((\alpha[a_0])[a_1])\cdots)[a_k]$$

とする. また, A が α-large であるとは, $\alpha[A]=0$ となることである.

次の定理の証明を与えることが 以下の目標である.

定理 1 $a,b\in M$ は超準元であるとし,

$$M\models [a,b]\ \text{は}\ \Gamma_0\text{−large}$$

とする. このとき, ある cut $a\in I<b$ と M で code される finite set S があって,

$$\langle I,\{S_i^I|i\in I\}\rangle \models ATR_0$$

ただし, $S_i^I=\{x\in M|\langle x,i\rangle\in S\}\cap I$ とする.

定理 1 から ATR_0 の proof theoretic-ordinal は, 以下のように求められる. $b\in M$ を $[a,b]$ は Γ_0-large となる最小のものとする. このとき, 定理 1 より, ある cut $a\in I<b$ と M で code される finite set S があって, $\langle I,\{S_i^I|i\in I\}\rangle$ は ATR_0 のモデルとなる. M における b の最小性より, 定理 1 から得られた ATR_0 のモデルでは, formula

$$\forall x\exists y([x,y]\ \text{は}\ \Gamma_0\text{−large})$$

は成り立たない. よって, ATR_0 で上の formula は証明できないことになる. 一方で, ATR_0 + (Γ_0 までの超限帰納法) という体系では, 上の formula が証明できるので, 結局 ATR_0 では, Γ_0 までの超限帰納法が証明できないことになる. すなわち, ATR_0 の proof-theoretic ordinal は Γ_0 (以下) である. (注. Γ_0 より小さい ordinal α に対し, ATR_0 で $WO(\alpha)$ が証明できることについては, [8] 参照.)

2 定理1の証明

定義 2.1 M の部分集合 $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ (k は M の超準元) に対し, A の limit I を次のように定義する: 単調増加関数 $f : \mathbf{N} \to A$ に対し,

$$I = \{x \in M | \exists i \in \mathbf{N}\ x < f(i)\}.$$

定義 2.2 集合 $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ が spread out であるとは, 任意の $i \leq k-2$ に対し, $2^{a_i} < a_{i+1}$ となることである.

補題 2.3 M で code される集合 $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ (k は M の超準元) に対し, A が spread out で, I が A の limit ならば,

$$I \models I\Delta_0 + (\exp).$$

証明. I で Δ_0^0-induction が成り立つことを示すには, Δ_0^0-最小値原理が成り立つことを示せばよいが, これは M で最小値原理が成り立つことと, Δ_0^0-formula は I と M の間で absolute であることによる. □

定義 2.4
- 2 階算術の部分体系 ACA_0 は, 基本算術公理, Σ_1^0-induction に次の公理 (ACA) を加えた体系である.

  $$\exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow \varphi(x))$$

  ただし, φ は arithmetical formula である.
- 2 階算術の部分体系 ATR_0 は, ACA_0 に 次の公理 (ATR) を加えた体系である.

  $$WO(\prec) \to \exists Y \forall b \forall x (x \in Y_b \leftrightarrow \varphi(x, Y_{\prec b}))$$

  ただし, φ は arithmetical formula である.
- $(\Sigma_1^1\text{-}AC)$ とは 次の公理とする.

  $$\forall x \exists Y \varphi(x, Y) \to \exists Y \forall x \varphi(x, Y_x)$$

  ただし, φ は Σ_1^1-formula である.

定義 2.5
- 集合 S が Σ_1^1-AC の ω-model であるとは (ACA) と $(\Sigma_1^1\text{-}AC)$ の 相対化が成り立つことである. ただし, second-order formula φ の S への相対化とは, 例えば, φ が $\forall X \exists Y \theta(X, Y)$ (θは arithmetical) のときは, $\forall x \exists y \theta(S_x, S_y)$ と変換した formula である.

- 集合 S が 集合 T を含む Σ^1_1-AC の ω-model であるとは, S は Σ^1_1-AC の ω-model であり, ある i に対して $S_i = T$ となることである.
- 集合 H が c-level nested Σ^1_1-AC hierarchy であるとは, 各 $0 < i \leq c$ に対して, H_i は $H_{<i}$ を含む Σ^1_1-AC の ω-model となることである.

集合 T に対し, T の Turing jump T' を, $T' = \{x | \mathrm{Tr}_{\Sigma^0_1}(x, T)\}$ と定義する. ただし, $\mathrm{Tr}_{\Sigma^0_1}(x, Z) \equiv \exists y \Theta(x, y, Z)$ は complete Σ^0_1 truth predicate relative to Z で, Θ は Δ^0_0 である. また, $j^{a,b}(Z) = \{e < a | \exists y \leq b \Theta(e, y, Z)\}$ とする.

定義 2.6 集合 $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ $(k \geq 1)$, S, T は finite set とする. A において S は T の Turing jump を近似するとは, 次が成り立つことである.

- 任意の $i < k$ に対して, $j^{a_i, a_{i+1}}(T) = j^{a_i, a_k}(T)$.
- $j^{a_{k-1}, a_k}(T) = \{x \in S | x < a_{k-1}\}$.

定義 2.7 集合 H が α-level jump hierarchy であるとは, 次が成り立つことである.

- $\gamma \prec \alpha$ ならば, $H_{\gamma+1} = (H_{\preceq\gamma})'$.
- $\lambda \preceq \alpha$ が limit notation ならば, $H_\lambda = H_{\prec\lambda}$.

定義 2.8 集合 $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ とする. A において集合 H は α-level jump hierarchy を近似するとは, 次が成り立つことである.

- $\gamma \prec \alpha$, $\ulcorner\gamma\urcorner < a_i$ $(i \leq k)$ ならば, $\{a_i, \ldots, a_k\}$ において $H_{\gamma+1}$ は $H_{\preceq\gamma}$ の Turing jump を近似する.
- $\lambda \preceq \alpha$ が limit notation で $\ulcorner\lambda\urcorner < a_k$ ならば, $H_\lambda = H_{\prec\lambda}$.

補題 2.9 次の性質をもつ $I\Delta_0 + (\exp)$-definable function

$$\mathrm{TruthCode}(\ulcorner\psi\urcorner, x)$$

が存在する: $\langle N, \{H\}\rangle \models I\Delta_0 + (\exp) + (H$ は α-level jump hierarchy$)$ であり, $\psi(X_{\gamma_1}, \ldots, X_{\gamma_k})$ は Σ^0_m-formula であって, $\alpha \succeq \beta \succeq (\sup\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} + m)$ ならば,

$$\langle N, \{H\}\rangle \models \psi(H_{\gamma_1}, \ldots, H_{\gamma_k}) \leftrightarrow \mathrm{TruthCode}(\ulcorner\psi\urcorner, \beta) \in H_\beta.$$

定義 2.10 M で code される集合 $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ (k は M の超準元, A は α-large, spread out), S は M の finite set とする. A において S は Σ^1_1-AC の ω-model を近似するとは, M で code される集合 H と ordinal notation の有限列 $\langle\alpha_i\rangle$, $\langle\beta_i\rangle$ があって, 次をみたすことである.

- $A-\{a_0\}$ において H は ω^α-level jump hierarchy を近似する.
- $0=\alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \cdots \prec \alpha_k \prec \beta_k \prec \cdots \prec \beta_1 \prec \beta_0 = \omega^{\alpha[a_0]}$.
- $i<k-4$ ならば, α_i と β_i の code は $2^{a_{i+1}^2}$ より小さい.
- $\varphi(X)$ は arithmetical formula で $a_{i-1}(0<i<k)$ より下で code されるとし,

$$\mathrm{TruthCode}(\ulcorner\varphi(X_{\beta_i})\urcorner, \beta_0) \in H_{\beta_0}$$

  ならば, ある $\gamma \preceq \alpha_i$ があって,

$$\mathrm{TruthCode}(\ulcorner\varphi(X_\gamma)\urcorner, \beta_0) \in H_{\beta_0}.$$

- $T_{\langle a_i,\gamma,d\rangle} = \{e|\mathrm{TruthCode}(\ulcorner\psi(e)\urcorner, \gamma) \in H_\gamma\}$ (右辺の集合を以下では, $H_\gamma^{[d]}$とかく) とすると,

$$S = \bigoplus_{a_i\in A, \gamma\prec\alpha_i, d<a_k} T_{\langle a_i,\gamma,d\rangle}$$

  ただし, d は $\psi(x)$ の code である.

定義 2.11 A, T は M で code される集合とし, $A=\{a_0,\ldots,a_k\}$ (k は M の超準元), S は M の finite set とする. A において S は T を含む Σ_1^1-AC の ω-model を近似するとは, A において S は Σ_1^1-AC の ω-model を近似し, $H_0=T$ となることである. (H は定義 2.10 のもの.)

定義 2.12 A, H は M で code される集合とし, $A=\{a_0,\ldots,a_k\}$ (k は M の超準元) とする. A において H は c-level nested Σ_1^1-AC hierarchy を近似するとは, 各 $0<i\le c$ に対し, A において H_i は $H_{<i}$ を含む Σ_1^1-AC の ω-model を近似することである.

補題 2.13 A, H は M で code される集合, I を A の任意の limit とし, $c\in I$ とする. このとき,

$$M \models A\text{において}H\text{は}c\text{−level nested }\Sigma_1^1-AC\text{ hierarchyを近似する}$$

ならば,

$$\langle I, \{H^I\}\rangle \models H^I\text{は }c\text{−level nested }\Sigma_1^1-AC\text{ hierarchy.}$$

補題 2.14 M の部分集合 C は γ_c-large であるとする. このとき, M で code される ε_0-large set $A\subset C$ と H が 存在して, A において H は c-level nested Σ_1^1-AC hierarchy を近似する.

nested Σ^1_1-AC hierarchy と (ATR) には 次のような関係がある.

補題 2.15 ACA_0 上で次が成り立つ.
"任意の X に対して, X を含む Σ^1_1-AC の ω-model が存在する" $\rightarrow$ (ATR).

証明. 任意の X に対して, X を含む Σ^1_1-AC の ω-model が存在するとし, $\prec$ を well-ordering とする. $\varphi(x,Y)$ を任意の arithmetical formula としたときに, φ によって定義される $\prec$ にそった hierarchy が存在することを示せばよい. $\varphi(x,Y)$ の中のすべての set parameter を code することにより, 1つの集合とみることができる. よって, 仮定により, これらの parameter を含む Σ^1_1-AC の ω-model S が存在する.

主張. 任意の c に対してある集合 W in S があって,

$$\forall b \prec c \forall x(x \in W_b \leftrightarrow \varphi(x, W_{\prec b}))$$

が成り立ち, b が c の predecessor でなければ, $W_b = \emptyset$ となる.
(主張の証明.) もし, ある c があって, どんな集合 W in S をとっても,

$$\forall b \prec c \forall x(x \in W_b \leftrightarrow \varphi(x, W_{\prec b}))$$

が成り立たないとすると, (ACA) により, そのような c 全体の集合が存在し, $\prec$ が well-ordering であることから, $\prec$ について最小の c がとれる. このとき, 任意の $d \prec c$ に対しては, ある集合 W in S があって,

$$\forall b \prec d \forall x(x \in W_b \leftrightarrow \varphi(x, W_{\prec b}))$$

となる. $(\Sigma^1_1$-$AC)$ in S を使うことにより, ある W in S が存在して, 任意の $d \prec c$ に対し,

$$\forall b \prec d \forall x(x \in (W_d)_b \leftrightarrow \varphi(x, (W_d)_{\prec b}))$$

となるが, (ACA) in S により, この W を使って,

$$\forall b \prec c \forall x(x \in Y_b \leftrightarrow \varphi(x, Y_{\prec b}))$$

となる集合 Y in S が作られる. Y は c までの hierarchy なので, 仮定に矛盾する.

(主張の証明終わり.)

主張より, $(\Sigma^1_1$-$AC)$ in S と (ACA) in S を (主張の証明の中と同様に) 使って, $\prec$ のすべての元に対して定義された hierarchy をつくることができる. □

定理 1 の証明. $[a,b]$ が Γ_0-large であることから, $[a+1,b]$ は γ_{a+1}-large である. よって, 補題 2.14 により, ある ε_0-large set $A \subset [a+1,b]$ と T が存在して, A において T は $(a+1)$-level Σ^1_1-AC hierarchy を近似する. I を A の limit, J を $\{0,\ldots,a+1\}$ の limit とする. 各 $j \in J$ に対し, T^I_{j+1} は T^I_j を含む Σ^1_1-AC の ω-model なので,

$$\langle I, \{(T^I_j)_i | i \in I, j \in J\}\rangle$$

は, "任意の X に対して, X を含む Σ^1_1-AC の ω-model が存在する" を成り立たせることがわかる. (各 T^I_j は, $H^{[d]}_\gamma$ の形の集合を含んでいることから, (ACA) も成り立つ.) よって, 補題 2.15 により, $\langle I, \{(T^I_j)_i | i \in I, j \in J\}\rangle$ は (ATR) を成り立たせる. あとは, $\{(T^I_j)_i | i \in I, j \in J\}$ を適当に code することにより S が得られる. □

3 Kruskal の定理の ATR_0 における証明不可能性

定義 3.1 半順序 $\leq$ をもつ有限集合 T が finite tree であるとは, 次が成り立つことである.

- T は最小元をもつ. (この元を T の root とよぶ.)
- 各 $b \in T$ に対し, $\{a \in T | a \leq b\}$ は T の全順序部分集合.

定義 3.2 T_1, T_2 を finite tree とする. T_1 の T_2 への embedding とは, 1 対 1 写像 $f : T_1 \to T_2$ で, 任意の $a, b \in T_1$ に対し, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ となる写像のことである. ただし, $a \wedge b$ とは, a と b より小さい元の中の最大元をあらわす. また, embedding $f : T_1 \to T_2$ が存在するとき, $T_1 \leq T_2$ とかく.

定理 2 (Kruskal) finite tree の任意の無限列 $\langle T_k | k < \omega\rangle$ に対し, ある i, j が存在して, $i < j < \omega$ かつ $T_i \leq T_j$ となる.

証明. [5] 参照. □

以下, $\mathcal{T}$ をすべての finite tree の集合とし, Kruskal の定理の主張を $WQO(\mathcal{T})$ とあらわす. また, Γ_0 より小さい ordinal に対する notation system が well-ordered である, という主張を $WO(\Gamma_0)$ とあらわす.

定義 3.3 primitive recursive mapping $o : \mathcal{T} \to \Gamma_0$ を次のように定義する. ($T \in \mathcal{T}$ に対し, T の元の個数を $|T|$ とかく.)

1. $|T|=1$ のとき, $o(T)=0$.

2. $|T|\neq 1$ のとき. このとき, root(T) は, 有限個の immediate successor $b_1,\ldots,b_m$ $(m\geq 1)$ をもつ. T の subtree $T^i=\{c\in T|c\geq b_i\}$ とするとき, $o(T)$ を次のように定義する. $(o(T^1)\succeq o(T^2)\succeq\cdots\succeq o(T^m)$ としてよい.)

$$o(T)=\begin{cases}\beta, & m=1 \text{ のとき}\\ \beta+\alpha, & m=2 \text{ のとき}\\ \varphi(\alpha,\beta), & m=3 \text{ かつ } \beta\prec\varphi(\alpha,\beta) \text{ のとき}\\ \beta+\alpha, & m=3 \text{ かつ } \beta=\varphi(\alpha,\beta) \text{ のとき}\\ \varphi(\beta,\alpha), & m\geq 4 \text{ のとき}\end{cases}$$

ただし, $\beta=o(T^1)$, $\alpha=o(T^2)$ である.

補題 3.4 任意の $\alpha\prec\Gamma_0$ に対し, ある finite tree T があって, $o(T)=\alpha$ となる.

証明. 任意の $0\prec\alpha\prec\Gamma_0$ に対して, $\alpha_i,\beta_i\prec\varphi(\alpha_i,\beta_i)\preceq\alpha$ $(1\leq i\leq n)$ を満たすような ordinal $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n$ が一意に存在して, $\alpha=\varphi(\alpha_1,\beta_1)+\cdots+\varphi(\alpha_n,\beta_n)$ かつ $\varphi(\alpha_1,\beta_1)\succeq\cdots\succeq\varphi(\alpha_n,\beta_n)$ とかけるので ([6] 参照), $o(T)$ の定義にしたがって, T をつくればよい. □

補題 3.5 finite tree T_1,T_2 に対し,

$$T_1\leq T_2\rightarrow o(T_1)\preceq o(T_2).$$

証明. Γ_0 より小さい ordinal α, β, α_1, α_2, β_1, β_2 に対して, 次の性質が成り立つ. ([6] 参照)

- $\alpha\preceq\beta$ ならば, $\beta\preceq\beta+\alpha\preceq\varphi(\beta,\alpha)$.
- $\alpha\preceq\beta$ かつ $\beta\prec\varphi(\alpha,\beta)$ ならば, $\beta+\alpha\preceq\varphi(\alpha,\beta)\preceq\varphi(\beta,\alpha)$.
- $\alpha_1\preceq\alpha_2$ かつ $\beta_1\preceq\beta_2$ ならば, $\varphi(\alpha_1,\beta_1)\preceq\varphi(\alpha_2,\beta_2)$.

これらの性質と $o(T)$ の定義よりわかる. □

補題 3.6 $WQO(\mathcal{T})\rightarrow WO(\Gamma_0)$.

証明. Γ_0 より小さい ordinal の 無限列 $\langle\alpha_k|k<\omega\rangle$ があって, $\alpha_k\succ\alpha_{k+1}$ $(\forall k\geq 0)$ とする. 補題3.4より, finite tree のある 無限列 $\langle T_k|k<\omega\rangle$ があって, $o(T_k)=\alpha_k$ となる. 一方, Kruskal の定理により, ある $i<j$ があって, $T_i\leq T_j$ となるので, 補題3.5により, $o(T_i)\preceq o(T_j)$, すなわち, $\alpha_i\preceq\alpha_j$ となり, $\langle\alpha_k|k<\omega\rangle$ のとり方に矛盾する. □

定理 3 ATR_0 で Kruskal の定理は証明できない.

証明. もし, 証明できるとすると, 補題3.6 により, ATR_0 で $WO(\Gamma_0)$ が証明できることになるが, これは定理1から得られた結果に矛盾する. □

定義3.3 と同様に, finite tree に Γ_{ε_0} までの ordinal を対応させることにより, 次の補題が成り立つ. ([7] 参照)

補題 3.7 $WQO(\mathcal{T}) \to WO(\Gamma_{\varepsilon_0})$.

上の補題と 次の定理により, ATR_0 で補題3.6 の逆, すなわち,

$$WO(\Gamma_0) \to WQO(\mathcal{T})$$

は証明できないことがわかる.

定理 4 $a, b \in M$ は超準元であるとし,

$$M \models [a, b] \text{ は} \Gamma_{\varepsilon_0}\text{−large}$$

とする. このとき, ある cut $a \in I < b$ と M で code される finite set S があって,

$$\langle I, \{S_i^I | i \in I\rangle \models ATR$$

ただし, ATR とは, ATR_0 に full second-order induction を加えた体系である.

実際, 定理4で得られたモデルでは, $WO(\Gamma_{\varepsilon_0})$ は成り立たないので, 補題3.7 より, Kruskal の定理は成り立たない. 一方, ATR の proof-theoretic ordinal は Γ_{ε_0} なので, ATR のモデルで $WO(\Gamma_0)$ は成り立つ. すなわち,

$$\langle I, \{S_i^I | i \in I\}\rangle \models WO(\Gamma_0) + \neg WQO(\mathcal{T}).$$

よって, 補題3.6 の逆は, ATR_0 で証明できない.

また, 定理4の証明は, 次の定義と補題から定理1の証明と同様である.

定義 3.8 集合 H が ω-level nested Σ_1^1-AC hierarchy であるとは, 任意の $i > 0$ に対して, H_i は $H_{<i}$ を含む Σ_1^1-AC の ω-model となることである.

定義 3.9 A, H は M で code される集合とし, $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ (k は M の超準元) とする. A において H は ω-level nested Σ_1^1-AC hierarchy を近似するとは, $0 < i < a_{j-1}$ ならば, $\{a_{j+1}, \dots, a_k\}$ において H_i は $H_{<i}$ を含む Σ_1^1-AC の ω-model を近似することである.

補題 3.10 M の部分集合 C は Γ_α-large であるとする. このとき, M で code される α-large set $A \subset C$ と H が存在して, A において H は ω-level nested Σ_1^1-AC hierarchy を近似する.

参考文献

[1] Jeremy Avigad and Richard Sommer, The model-theoretic ordinal analysis of theories of predicative strength, The Journal of Symbolic Logic, to appear.

[2] Jeremy Avigad and Richard Sommer, A model-theoretic approach to ordinal analysis, The Bulletin of Symbolic Logic, 3:17-52, 1997.

[3] Jeremy Avigad, On the relationship between ATR_0 and $\widehat{ID}_{<\omega}$, The Journal of Symbolic Logic, 61:768-779, 1996.

[4] Richard Sommer, Transfinite induction within Peano Arithmetic, Annals of Pure and Applied Logic, 76:231-289, 1995.

[5] S.G. Simpson, Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees, Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics (Leo Harrington et al., editors), North-Holland, 1985.

[6] J.H. Gallier, What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ_0 ? A survey of some results in proof theory, Annals of Pure and Applied Logic, 53:199-260, 1991.

[7] M. Rathjen and A. Weiermann, Proof-theoretic investigations on Kruskal's theorem, Annals of Pure and Applied Logic, 60:49-88, 1993.

[8] K. Schütte, Proof Theory, Springer-Verlag, 1977.

[1,2] では, ATR_0 の他に, 1 階や 2 階算術の多くの重要な体系に対して, ここで紹介した方法を使って proof-theoretic ordinal を求めている. [3] では, ATR_0 と $\widehat{ID}_{<\omega}$ の関係について, [4] では, PA のいろいろな部分体系の間の相対的な強さについて調べている. [5] では Kruskal の定理の ATR_0 における証明不可能性について述べているとともに, Kruskal の定理のある拡張が, Π^1_1-CA_0 で証明できないことについても述べている. また, [6] では, [5] における Kruskal の定理の ATR_0 における証明不可能性の証明の不備を訂正している. [7] では, Kruskal の定理と Ackermann-ordinal の well-orderedness が同値であることを示している.